ENST de Bretagne 23 septembre 2004
FIP - Promotion 2007
M 101 : Mathématiques 1
Documents autorisés : polycopié et formulaire.

PC notée

(Corrections)

Les notations sont données à titre indicatif. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1 [7 points]

1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = n \sin \frac{1}{n}$. [2 points]

   $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sin \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$ car $\sin x/x$ tend vers 1 quand x tend vers 0. Le terme général de la série tend donc vers 1 et non vers 0. La série diverge donc.

2. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. [2 points]

   $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \frac{2n+1}{2n} \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \sim \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0 < 1$. Donc d'après le critère de d'Alembert, la série converge.

3. i. Montrer que si $a \neq 0$ alors $\exp\left(\frac{-a^2}{2}\right) < 1$. (Indication : tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto \exp x$). [1 points]

   Pour tout réel a non nul, $-a^2/2$ est négatif et donc, par croissance de la fonction exponentielle, $\exp\left(\frac{-a^2}{2}\right) < \exp(0) = 1$.

   ii. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \left(\cosh\left(\frac{a}{n}\right)\right)^{-n^3}$. Utiliser pour cela les développements limités en 0 de ln et cosh :

   $\ln(1+x) = x + \circ(x)$

   $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$ [2 points]

   $\ln\left(u_n^{1/n}\right) = -n^2\left(1 + \frac{a^2}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -n^2\left(\frac{a^2}{2n^2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \longrightarrow -\frac{a^2}{2}$. Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $u_n^{1/n} \longrightarrow \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}$. Comme ce dernier réel est inférieur strictement à 1 d'après la question précédente, on en déduit la convergence de la série d'après le critère de Cauchy.

Exercice 2 [2 points]

Soit $u_n = \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

1. Exprimer u_n en fonction de $\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$ et $\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)$ pour $n \geq 1$. [0.5 points]
   $u_n = \ln\dfrac{n+1}{n} - \ln\dfrac{n+2}{n+1}$
2. Exprimer la somme partielle S_N de la série de terme général u_n en fonction de N pour $N \geq 2$. [0.5 points]
   $S_n = \ln 2 - \ln\dfrac{N+2}{N+1}$
3. En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ et la valeur de sa somme S. [0.5 points]
   S_N tend vers $\ln 2$ et donc, par définition de la convergence d'une série numérique, la série converge vers $S = \ln 2$.
4. La série $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ converge-t'elle ? Si oui, quelle est sa somme σ ? [0.5 points]
   Oui, il s'agit de la première à laquelle on a retiré le premier terme : $\sigma = S - u_1 = \ln(3/2)$.

Exercice 3 [7 points]
Soit f_n la fonction définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} \end{array}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$.

1. Montrer que la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. [1 point]
   Pour tout x réel positif, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+n^2} < \dfrac{1}{n^2}$. Cette dernière série numérique étant une série de Riemann convergente, on en déduit par définition que la série de fonction converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.
   On note f la somme de la série de fonction sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$. [1.5 points]
   D'après la question précédente, la série de fonctions converge normalement, donc uniformément. Les f_n sont de plus continues donc par théorème, la somme f est continue.
3. Soit A un réel strictement positif.
   i. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{n\mathrm{e}^{-nA}}{1+n^2}$ converge en utilisant $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = 0$. [1.5 points]
   $v_n^{1/n} \sim \mathrm{e}^{-A}\left(\dfrac{n}{1+n^2}\right)^{1/n}$ or $\ln\left[\left(\dfrac{n}{1+n^2}\right)^{1/n}\right] = \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n}{1+n^2}\right) \sim \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
   Donc $\left(\dfrac{n}{1+n^2}\right)^{1/n}$ tend vers $\exp(0) = 1$ et $v_n^{1/n} \sim \mathrm{e}^{-A} < 1$ pour tout A strictement positif. D'après Cauchy, la série de terme général v_n converge.

ii. En déduire la convergence normale de la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n^{'}$ sur $[A, +\infty]$. [1 point]

Pour tout $x \in [A, +\infty]$, $|f_n^{'}(x)| < \dfrac{n\mathrm{e}^{-nA}}{1+n^2}$. D'après la question précédente et la définition de la convergence normale, la série des fonctions dérivées converge normalement.

iii. En déduire que f est dérivable sur $[A, +\infty]$. Donner l'expression de f'. [2 points]

Puisque la série des fonctions dérivées converge normalement, elle converge absolument. D'autre part, on a déjà montré la convergence normale sur $\mathbb{R}^+$ de la série $\sum f_n$. Comme cette dernière implique la convergence simple, la série numérique $\sum f_n(x)$ converge pour tout réel x positif. Pour le théorème, il nous suffisait un seul tel x_0. On peut donc appliquer ce théorème : la série de fonction $\sum f_n$ converge uniformément (ce qu'on savait déjà grâce à la convergence normale montrée antérieurement), sa somme f est dérivable et $f'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n^{'}(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{-n\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.

Exercice 4 [2 points]

Donner le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ pour

1. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^n}$. [1 point]

   $|a_n|^{1/n} = \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$. Le rayon de convergence est donc $+\infty$.

2. $a_n = \dfrac{(n+1)^p}{n!}$ avec $p \in \mathbb{R}$. [1 point]

   $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^p \cdot \dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$. Le rayon de convergence est donc $+\infty$.

Exercice 5 [2 points]

Soit $h(x) = \sin^2(x)\cos(x)$.

1. Trouver les réels α et β tels que $h(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$. (Indication : utiliser les deux identités $2\sin a \sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ et $2\sin a\cos a = \sin 2a$). [1 point]

   $h(x) = \sin x(\sin x\cos x) = (\sin x \sin 2x)/2 = (\cos x - \cos 3x)/4$. $\alpha = 1/4$ et $\beta = -1/4$.

2. Utilisant le développement en série entière $\cos x = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$, développer en série entière la fonction h. [1 point]

   $\cos 3x = \sum_{n\geq 1}(-1)^n(3x)^{2n}/(2n!) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n 9^n x^{2n}/(2n!)$.

   Donc $h(x) = \dfrac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n}{2n!}(1-9^n)x^{2n}$