ENST de Bretagne — 23 septembre 2004

FIP - Promotion 2007

M 101 : Mathématiques 1

Documents autorisés : polycopié et formulaire.

PC notée

(durée 1h20)

Les notations sont données à titre indicatif. Il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1 [7 points]

1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = n \sin \frac{1}{n}$. [2 points]
2. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$. [2 points]
3. i. Montrer que si $a \neq 0$ alors $\exp\left(\frac{-a^2}{2}\right) < 1$. (Indication : tracer le graphe de la fonction $x \longmapsto \exp x$). [1 points]

   ii. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \left(\cosh\left(\frac{a}{n}\right)\right)^{-n^3}$. Utiliser pour cela les développements limités en 0 de ln et cosh :
   $\ln(1+x) = x + \circ(x)$
   $\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$ [2 points]

Exercice 2 [2 points]

Soit $u_n = \ln \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$.

1. Exprimer u_n en fonction de $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ et $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$ pour $n \geq 1$. [0.5 points]
2. Exprimer la somme partielle S_N de la série de terme général u_n en fonction de N pour $N \geq 2$. [0.5 points]
3. En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ et la valeur de sa somme S. [0.5 points]
4. La série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge-t'elle ? Si oui, quelle est sa somme σ ? [0.5 points]

Exercice 3 [7 points]

Soit f_n la fonction définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2} \end{array}$$

Le but de cet exercice est d'étudier la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n$.

1. Montrer que la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$. [1 point]

   ON NOTE f la somme de la série de fonction sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$. [1.5 points]
3. i. Montrer que la série de terme général $v_n = \dfrac{n\mathrm{e}^{-nA}}{1+n^2}$ converge en utilisant $\lim_{x\to+0} x\ln x = 0$. [1.5 points]

   ii. En déduire la convergence normale de la série de fonction $\sum_{n\geq 1} f_n'$ sur $[A, +\infty]$. [1 point]

   iii. En déduire que f est dérivable sur $[A, +\infty]$. Donner l'expression de f'. [2 points]

Exercice 4 [2 points]
Donner le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ pour

1. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)^n}$. [1 point]
2. $a_n = \dfrac{(n+1)^p}{n!}$ avec $p \in \mathbb{R}$. [1 point]

Exercice 5 [2 points]
Soit $h(x) = \sin^2(x)\,\cos(x)$.

1. Trouver les réels α et β tels que $h(x) = \alpha\cos(x) + \beta\sin(x)$. (Indication : utiliser les deux identités $2\sin a\sin b = \cos(a-b) - \cos(a+b)$ et $2\sin a\cos a = \sin 2a$). [1 point]
2. Utilisant le développement en série entière $\cos x = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$, développer en série entière la fonction h. [1 point]