

Partie B: Algèbre.

Exercice 2: 4 pts

- a) Vrai, c'est alors la représentation matricielle de f dans la base des vecteurs propres dont les coordonnées forment les colonnes de P .
- b) Faux: si 0 est valeur propre alors $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, donc D^{-1} n'existe pas. Or $D = P^{-1}AP$ ie $A = P D D^{-1}$ et $A^{-1} = P D^{-1} P^{-1}$ donc n'existe pas non plus.
- c) Vrai: si $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ avec $d_1 d_2 d_3 \neq 0$ alors $\begin{cases} d_1 \neq 0 \\ d_2 \neq 0 \\ d_3 \neq 0 \end{cases}$
donc $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d_3 \end{pmatrix}$ existe et A^{-1} aussi (voir b))
- d) $A^n = P D^n P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & 0 & 0 \\ 0 & d_2^n & 0 \\ 0 & 0 & d_3^n \end{pmatrix}$ donc d_i^n sont les valeurs propres de A^n . C'est faux!

Exercice 3: 8pts (+ 2 pts bonus pour f)).

- a) Polynôme caractéristique de A : $\det(A - \lambda I)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & 2 \\ 6 & -5-\lambda & 4 \\ 4 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

Par Sarrus

$$= (4-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 48 - 48 + 18(4-\lambda) + 16(4-\lambda) + 8(5+\lambda)$$

Exo 3 - a)

2)

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= (-20 - 4\lambda + 5\lambda + \lambda^2)(4 - \lambda) - 36 + 34(4 - \lambda) + 40 + 8\lambda \\ &= -80 + 20\lambda + 4\lambda - \lambda^2 + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 36 + 136 - 34\lambda + 8\lambda \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 2\lambda \\ &= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)\end{aligned}$$

donc $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 2$

1) Cherchons $E_0 = \ker(A)$.

$$u \in \ker(A) \Leftrightarrow Au = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 5y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 2z \end{cases}$$

E_0 est engendré par $u_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

* Cherchons $E_1 = \ker(A - I)$

$$u \in \ker(A - I) \Leftrightarrow Au = u \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 2z = x \\ 6x - 5y + 4z = y \\ 4x - 4y + 4z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 6y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 2z = 0 \\ 4x - 4y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ engendre E_1

* Cherchons $E_2 = \ker(A - 2I)$

$$u \in \ker(A - 2I) \Leftrightarrow Au = 2u \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 2x \\ 6x - 5y + 4z = 2y \\ 4x - 4y + 4z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 0 \\ 6x - 7y + 4z = 0 \\ 4x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

$u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ engendre E_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ z = 2x \end{cases}$$

Exo 3 - c) On obtient 3 sous-espaces propres supplémentaires, engendré chacun par un seul vecteur (droite)
 Ils forment un système libre (u_0, u_1, u_2) de $\mathbb{R}^3$ et donc une base.
 Les valeurs propres sont réelles donc A est diagonalisable ds $\mathbb{R}$.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

d) $u' = f(u) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 4x - 3y + 2z \\ y' = 6x - 5y + 4z \\ z' = 4x - 4y + 4z \end{cases}$ dans la base canonique.
 $\Leftrightarrow u' = Au$

$u' = f(u) \Leftrightarrow u' = Du \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 0 \\ y' = y \\ z' = 2z \end{cases}$ dans la base (u_0, u_1, u_2) des vecteurs propres.

e) 0 est valeur propre donc A n'est pas inversible, D non plus.

f) $\frac{dx}{dt} = Ax$ or $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

donc $\frac{dx}{dt} = PDP^{-1}x$ ie $P^{-1}\frac{dx}{dt} = DP^{-1}x$

ou bien $\frac{dy}{dt} = Dy$ en posant $y = P^{-1}x$ (1)

y dépend de t donc $y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$ vérifie : $\begin{cases} \alpha'(t) = 0 \\ \beta'(t) = \beta(t) \\ \gamma'(t) = 2\gamma(t) \end{cases}$

En intégrant on obtient $\begin{cases} \alpha(t) = a \text{ (cte)} \\ \beta(t) = b e^t \\ \gamma(t) = c e^{2t} \end{cases} \text{ (b et c cte).}$

et d'après (1) $x(t) = P y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b e^t \\ c e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b e^t + c e^{2t} \\ 2a + b e^t + 2c e^{2t} \\ a + 2c e^{2t} \end{pmatrix}$

Exo 3 - f)

$$X(t) = \begin{pmatrix} a + b e^t + c e^{2t} \\ 2a + b e^t + 2c e^{2t} \\ a + 2c e^{2t} \end{pmatrix}$$

X_0 est telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ie : $\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 2a + b + 2c = 3 \\ a + 2c = 3 \end{cases} \begin{matrix} \text{(*)} \\ \text{(*)} \\ \text{(*)} \end{matrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a + c = 2 \\ a + 2c = 3 \end{cases} \begin{matrix} \\ \text{(*)} \\ \text{(*)} \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

donc $X_0(t) = \begin{pmatrix} 1 + e^{2t} - e^t \\ 2 + 2e^{2t} - e^t \\ 1 + 2e^{2t} \end{pmatrix}$

Barème :

- 3a : 2 pts
- 3b : 2 pts
- 3c : 1 pt
- 3d : 2 pts
- 3e : 1 pt
- 3f : 2 pts bonus.